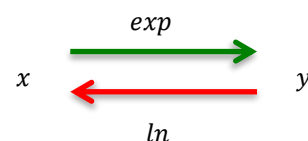


La fonction logarithme

I) Définition et propriétés

A) Logarithme népérien d'un nombre réel



Définition

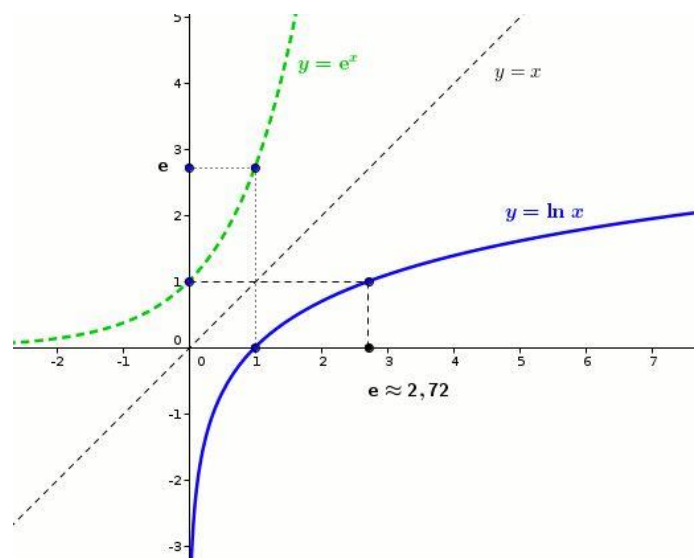
Pour tout réel $a > 0$, il existe un **unique nombre réel** b qui vérifie $a = e^b$
 b est appelé **logarithme népérien** de a et notée **$\ln(a)$** .

Propriétés

$$\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \ln(e) = 1$$

$$e^{\ln(x)} = x \quad \text{pour tout réel } x > 0$$

$$\ln(e^x) = x \quad \text{pour tout réel } x$$



Exemple :

$$\ln(e^3) = 3$$

$$\ln(e^{-1}) = -1$$

$$e^{\ln(7)} = 7$$

$$e^{\ln(-2)} = \text{Impossible } (-2 < 0)$$

B) Relation fonctionnelle et propriétés

Pour tous réels a et b , et tout réel x ,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^x = x \ln a$$

Exemple : $\ln(3 \times 4) = \ln(3) + \ln(4)$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\ln\left(\frac{5}{8}\right) = \ln(5) - \ln(8)$$

$$\ln(3^6) = 6 \ln(3)$$

De même avec les x : $\ln(x^2) = 2 \ln(x)$

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln(x) - \ln(x+1)$$

II) Etude de la fonction ln

A) Dérivée et sens de variation

Dérivée

La fonction $f(x) = \ln(x)$ est **dérivable** et sa dérivée est $f'(x) = \frac{1}{x}$

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple : Soit $f(x) = \ln(x^2 - 6)$. On pose $u(x) = x^2 - 6$ alors $u'(x) = 2x$

$$\text{Alors } f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 - 6}$$

Tableau de variation de \ln

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\ln' x = \frac{1}{x}$		+	+
Variations de \ln			

La fonction $x \rightarrow \ln(x)$ est **strictement croissante sur \mathbb{R}_+** . Ainsi :

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$$

Signe de la fonction \ln

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	0
			+

B) Limites

Limites de \ln :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

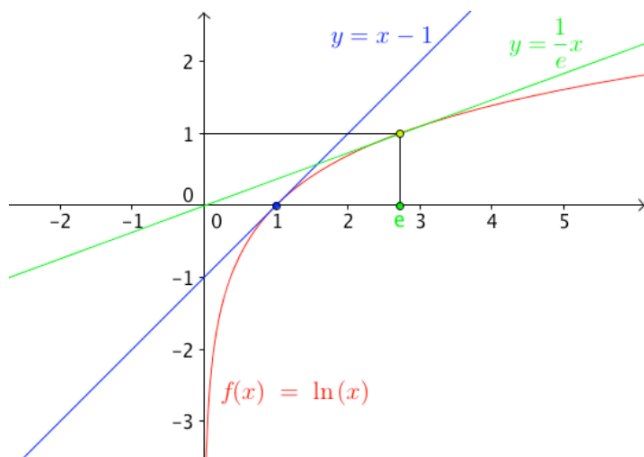
Croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

x l'emporte sur la fonction \ln . On peut généraliser avec les fonctions puissances $x \rightarrow x^p$

C) Représentation graphique



2 tangentes particulières :

Tangente en $x = 1$ (tangente bleue)

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \quad \text{or} \quad f'(x) = \frac{1}{x} \text{ donc } f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$y = 1(x - 1) + \ln(1)$$

$$y = x - 1 + 0$$

$$y = x - 1$$

Tangente en $x = e$ (tangente verte)(rappel : $e \cong 2,7$)

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) \quad \text{or} \quad f'(x) = \frac{1}{x} \text{ donc } f'(e) = \frac{1}{e}$$

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + f(e) \quad \text{et} \quad f(e) = \ln(e) = \ln(e^1) = 1$$

$$y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}e + 1 \quad \text{soit} \quad y = \frac{1}{e}x$$

III) La fonction logarithme décimale

Définition

La fonction **logarithme décimal**, noté **log**, définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Propriété

Par définition, cette fonction a les mêmes propriétés que la fonction \ln .

Pour tout entier relatif : **$\log 10^n = n$**

Exemple : $\log(3 \times 4) = \log(3) + \log(4)$ $\log(10^7) = 7$ car $\log(10^7) = 7 \log(10) = \frac{7 \ln 10}{\ln 10} = 7$

IV) Applications

Application 1 : Résoudre une équation en appliquant la définition

Résoudre l'équation $e^x = 2$

$$e^x = 2 \Leftrightarrow \ln e^x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

Résoudre l'équation $\ln x = 3$

$$\ln x = 3 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^3 \Leftrightarrow x = e^3$$

Applications 2 : Manipuler les propriétés algébriques

I. Écrire les nombres A, B, C en fonction de $\ln 2$

$$A = \ln 8 \quad B = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \quad C = \ln \sqrt{2} \quad D = \ln(\sqrt{6} - 2) + \ln(\sqrt{6} + 2)$$

$$A = \ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2$$

$$B = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4 = -\ln 2^2 = -2 \ln 2$$

$$C = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$D = \ln(\sqrt{6} - 2) + \ln(\sqrt{6} + 2) = \ln((\sqrt{6} - 2) \times (\sqrt{6} + 2)) = \ln(6 - 4) = \ln 2$$

2. Écrire la fonction suivante à l'aide d'un seul logarithme après avoir déterminé l'ensemble de définition.

$$f(x) = \ln x + 2 \ln(x - 2)$$

f est définie si $x > 0$ et $x - 2 > 0$; f est définie si $x > 2$

$$\text{Pour } x > 2 : f(x) = \ln x + 2 \ln(x - 2) = \ln x + \ln((x - 2)^2) = \ln(x(x - 2)^2)$$

Remarque

Avant de simplifier une expression contenant des logarithmes il est **très important** de commencer par déterminer l'ensemble de définition de cette expression.

En effet l'expression $\ln(x(x - 2)^2)$ est définie sur $]0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$ alors que f est définie sur $]2 ; +\infty[$ uniquement.

Application 3 : Résoudre une équation

Résoudre l'équation $\ln(x + 3) + \ln(x - 2) = \ln 6$

Tout d'abord il faut déterminer l'ensemble de définition de cette équation.

Cette équation est définie si : $x + 3 > 0$ et $x - 2 > 0$

$x > -3$ et $x > 2$ revient à dire $x > 2$.

L'ensemble des solutions de l'équation est à chercher dans l'intervalle $]2 ; +\infty[$

$$\begin{aligned} \ln(x + 3) + \ln(x - 2) = \ln 6 &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln((x + 3)(x - 2)) = \ln 6 \\ x > 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)(x - 2) = 6 \\ x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(x + 3)(x - 2) = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$x_1 = \frac{-1 + 7}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{-1 - 7}{2} = -4 < 2$$

L'équation ne possède donc qu'une solution : $x = 3$

Application 5 : Calculer une limite en utilisant les croissances comparées

Déterminer la limite de $f(x) = x - \ln x$ en $+\infty$

$f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ (on cherche à faire apparaître une des formule de croissance comparée)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$