Chap. 2 La fonction exponentielle

I) Définitions

A) Une fonction particulière

Lemme (1)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\boldsymbol{f' = f}$ et $\boldsymbol{f(0) = 1}$
Alors, **pour tout x réel, $f(-x) \times f(x) = 1$** et **f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$**

Théorème et Définition (2)

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\boldsymbol{f' = f}$ et $\boldsymbol{f(0) = 1.}$
Cette fonction s'appelle la fonction **exponentielle**. On la note $\boldsymbol{exp}$.

B) Une nouvelle notation

Définition
On appelle $\boldsymbol{e}$ le nombre **image de 1 par la fonction exponentielle : $\boldsymbol{exp(1) = e}$**

D'après la calculatrice : $\boldsymbol{e \approx 2,71828}$

Pour tout entier relatif n : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$ (Voir II)
Par convention, on étend cette notation pour tout x réel et on note :

$$\boldsymbol{\exp(x) = e^x}$$

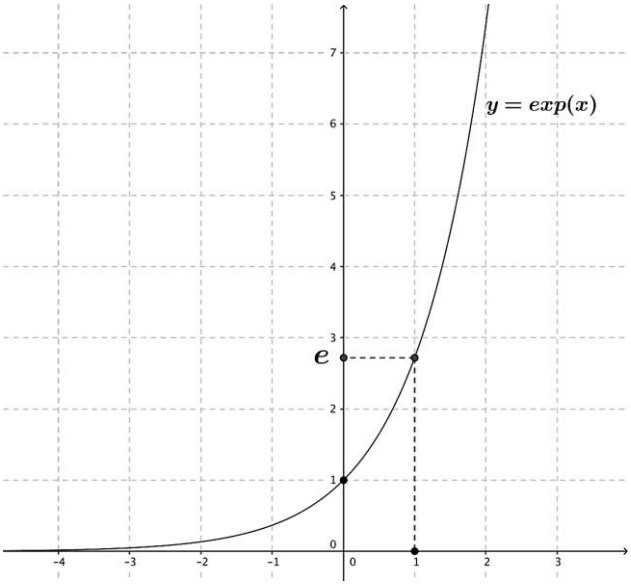
II) Propriété algébriques

Pour tous réels x et y, et tout entier relatif n,

$$\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y} \qquad \boldsymbol{e^{-x} = \frac{1}{e^x}} \qquad \boldsymbol{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}} \qquad \boldsymbol{(e^x)^n = e^{nx}}$$

Remarque
Les seules fonctions vérifiant cette relation sont les fonctions du type $f(x) = exp(kx)$ k réel quelconque

III) Etude générale de la fonction exponentielle



Théorèmes

(1) La fonction exponentielle est **dérivable** donc **continue sur $\mathbb{R}$.**

(2) La fonction exponentielle est **strictement positive sur $\mathbb{R}$.**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$$

(3) La fonction **exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Propriété (5) *(qui se déduit de la stricte croissance de la fonction exponentielle)*

x et y deux réels quelconques

$$x = y \iff e^x = e^y \qquad et \qquad x < y \iff e^x < e^y$$

Propriété (6) : Dérivée de la fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction f définie par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

IV) Croissances comparées

Théorème (7)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Remarques

Pour retrouver les résultats précédents, on peut retenir : ***« En l'infini l'exponentielle l'emporte sur x »***

On pourrait également généraliser les résultats et montrer que :

Pour n entier naturel non nul, $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

V) Sur des exemples

A) Résoudre une équation ou une inéquation avec l'exponentielle

- Résoudre l'équation : $\frac{\mathbf{e^{3x+1}}}{\mathbf{e^{x}}} = \mathbf{e^{x-1}}$

- Résoudre l'inéquation : $\boldsymbol{e^{x^2} < e}$

B) Calculer une limite en utilisant les croissances comparées

- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+3x}{x+1}$

- Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$